Satz 88

Sei $A_1 = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, \delta, F)$ *ein NPDA, der mit akzeptierendem Zustand akzeptiert. Dann kann in linearer Zeit ein NPDA* $A_2 = (Q', \Sigma, \Delta', q_0', Z_0', \delta')$ *konstruiert werden, der* $L(A_1)$ *mit leerem Stack akzeptiert.*

Beweis:

A_2 simuliert A_1. Sobald A_1 in einen akzeptierenden Zustand gerät, rät A_2, ob die Eingabe zu Ende gelesen ist. Falls A_2 dies meint, wird der Keller geleert.

Um zu verhindern, dass bei der Simulation von A_1 der Keller leer wird, ohne dass A_1 akzeptiert, führen wir ein neues Kellersymbol Z_0' ein:

$$\begin{aligned} Q' &= Q \cup \{\bar{q}, q_0'\} \\ \Delta' &= \Delta \cup \{Z_0'\} \end{aligned}$$

und wir erweitern δ zu δ' gemäß

$$\begin{array}{ll} \delta'(q_0', \epsilon, Z_0') = \{(q_0, Z_0 Z_0')\} & \\ \delta'(q, \epsilon, Z) \mathrel{\cup}= \{(\bar{q}, \epsilon)\} & \text{für } q \in F,\ Z \in \Delta' \\ \delta'(\bar{q}, \epsilon, Z) = \{(\bar{q}, \epsilon)\} & \text{für } Z \in \Delta' \end{array}$$

□

Bemerkung:

Akzeptieren mit leerem Keller bedeutet, dass der NPDA akzeptiert, falls der Keller leer ist und die Eingabe gelesen ist.

Bemerkung:

Akzeptieren mit leerem Keller bedeutet, dass der NPDA akzeptiert, falls der Keller leer ist und die Eingabe gelesen ist, bzw.
dass, falls der Keller leer ist, der NPDA die bisher gelesene Eingabe akzeptiert.

Satz 89

Sei $A_1 = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, \delta)$ *ein NPDA, der mit leerem Keller akzeptiert. Dann kann in linearer Zeit ein NPDA* $A_2 = (Q', \Sigma, \Delta', q_0', Z_0', \delta', F)$ *konstruiert werden, welcher* $L(A_1)$ *mit akzeptierendem Zustand akzeptiert.*

Beweis:

A_2 simuliert A_1. Am Anfang steht ein neues Kellersymbol auf dem Stack. Sobald bei der Simulation von A_1 dieses auf dem Stack vorgefunden wird, weiß man, dass A_1 seinen Stack leergeräumt hat und folglich akzeptiert. Folglich geht A_2 in einen akzeptierenden Zustand und hält:

$$
\begin{array}{lcl}
Q' & = & Q \cup \{q'_0, q_f\} \\
\Delta' & = & \Delta \cup \{Z'_0\} \\
F & = & \{q_f\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\delta'(q'_0, \epsilon, Z'_0) & = & \{(q_0, Z_0 Z'_0)\} \\
\delta'(q, a, Z) & = & \delta(q, a, Z) \text{ für } q \in Q,\ a \in \Sigma \cup \{\epsilon\},\ Z \in \Delta \\
\delta'(q, \epsilon, Z'_0) & = & \{(q_f, Z'_0)\} \text{ für } q \in Q
\end{array}
$$

$\square$

4.8 Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen

Satz 90

Sei G eine CFG in Greibach-Normalform. Dann kann in linearer Zeit ein NPDA N konstruiert werden (welcher mit leerem Stack akzeptiert), so dass

$$L(N) = L(G)\ .$$

Beweis:

Sei o.B.d.A. $\epsilon \notin L(G)$.

Der Automat startet mit S auf dem Stack. Er sieht sich in jedem Schritt das oberste Stacksymbol A an und überprüft, ob es in G eine Produktion gibt, deren linke Seite A ist und deren rechte Seite mit dem Terminal beginnt, welches unter dem Lesekopf steht.

Sei also $G = (V, T, P, S)$.

Konstruiere NPDA $N = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, \delta)$ mit

$$\begin{array}{lcl} Q & := & \{q_0\} \\ \Delta & := & V \\ \Sigma & := & T \\ Z_0 & := & S \end{array}$$

$$\delta(q_0, a, A) \ni (q_0, \alpha) \quad \text{für } (A \to a\alpha) \in P\ .$$

Beweis (Forts.):

Zu zeigen ist nun: $L(N) = L(G)$.

Hilfsbehauptung:

$$S \to_G^* w_1 \dots w_i A_1 \dots A_m \text{ mit } w_j \in T, A_j \in V \text{ per Linksableitung}$$
$$\Leftrightarrow (q_0, w_1 \dots w_i, Z_0) \to_N^* (q_0, \epsilon, A_1 \dots A_m)$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Anzahl der Schritte in der Linksableitung.

Beweis (Forts.):

Induktionsanfang ($i = 0$):

$$S \rightarrow_G^* S \qquad \Leftrightarrow \qquad (q_0, \epsilon, Z_0) \rightarrow_N^* (q_0, \epsilon, Z_0)$$

Beweis (Forts.):

Induktionsschritt ($(i-1) \mapsto i$):

$$
\begin{array}{lll}
 & S & \to_G^* w_1 \ldots w_i A_1 \ldots A_m \\
\Leftrightarrow & S & \to_G^* w_1 \ldots w_{i-1} A' A_v \ldots A_m \quad v \in \{1, \ldots, m+1\} \\
 & & \to_G w_1 \ldots w_i A_1 \ldots A_m \\
 & & (\text{also } (A' \to w_i\, A_1 \ldots A_{v-1}) \in P)
\end{array}
$$

gemäß Induktionsvoraussetzung

$$
\begin{array}{lll}
\Leftrightarrow & (q_0, w_1 \ldots w_{i-1}, Z_0) & \to_N^* (q_0, \epsilon, A' A_v \ldots A_m) \\
\Leftrightarrow & (q_0, w_1 \ldots w_{i-1} w_i, Z_0) & \to_N^* (q_0, w_i, A' A_v \ldots A_m) \\
 & & \to_N (q_0, \epsilon, A_1 \ldots A_m) \\
 & & \text{da } (A' \to w_i\, A_1 \ldots A_{v-1}) \in P
\end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad (q_0, w_1 \ldots w_i, Z_0) \quad \to_N^* (q_0, \epsilon, A_1 \ldots A_m)
$$

Beweis (Forts.):

Aus der Hilfsbehauptung folgt

$$L(N) = L(G) \; .$$

$\square$

Satz 91

Sei $N = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, \delta)$ *ein NPDA, der mit leerem Keller akzeptiert. Dann ist* $L(N)$ *kontextfrei.*

Beweis:

Wir definieren:

$$
\begin{aligned}
&G = (V, T, P, S)\\
&T := \Sigma\\
&V := Q \times \Delta \times Q \cup \{S\} \qquad \text{wobei wir die Tupel mit } [,,] \text{ notieren}\\
&P \ni S \to [q_0, Z_0, q] \text{ für } q \in Q\\
&P \ni [q, Z, q_m] \to a[p, Z_1, q_1][q_1, Z_2, q_2] \cdots [q_{m-1}, Z_m, q_m]\\
&\qquad\qquad \text{für } \delta(q, a, Z) \ni (p, Z_1 \cdots Z_m), \forall q_1, \ldots, q_m \in Q,\\
&\qquad\qquad\qquad \text{mit } a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}\,.
\end{aligned}
$$

Idee: Aus $[p, X, q]$ sollen sich alle die Wörter ableiten lassen, die der NPDA N lesen kann, wenn er im Zustand p mit (lediglich) X auf dem Stack startet und im Zustand q mit leerem Stack endet.

Beweis (Forts.):

Hilfsbehauptung:

$$[p, X, q] \to_G^* w \Leftrightarrow (p, w, X) \to_N^* (q, \epsilon, \epsilon)\,.$$

„$\Rightarrow$“: Induktion über die Länge l der Ableitung.

Induktionsanfang ($l = 1$):

$$\begin{aligned} & [p, X, q] \to_G w \\ \Rightarrow \quad & \delta(p, w, X) \ni (q, \epsilon) \\ \Rightarrow \quad & (p, w, X) \to_N (q, \epsilon, \epsilon) \end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Induktionsschritt ($(l-1) \mapsto l$):

Gelte

$$\begin{aligned}[p, X, q_{m+1}] &\rightarrow_G a[q_1, X_1, q_2][q_2, X_2, q_3] \cdots [q_m, X_m, q_{m+1}] \\ &\rightarrow_G^* aw^{(1)} \cdots w^{(m)} = w\end{aligned}$$

mit $(q_1, X_1 \cdots X_m) \in \delta(p, a, X)$, $[q_i, X_i, q_{i+1}] \rightarrow_G^{l_i} w^{(i)}$ und $\sum l_i < l$.

Dann gilt gemäß Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & (q_i, w^{(i)}, X_i) \rightarrow_N^{l_i} (q_{i+1}, \epsilon, \epsilon) \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\ \Rightarrow \quad & (p, \underbrace{aw^{(1)} \cdots w^{(m)}}_{=w}, X) \rightarrow_N (q_1, w^{(1)} \cdots w^{(m)}, X_1 \cdots X_m) \\ & \rightarrow_N^{<l} (q_{m+1}, \epsilon, \epsilon)\ . \end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

„$\Leftarrow$": Induktion über die Länge l einer Rechnung des NPDAs N

Induktionsanfang ($l = 1$):

$$\begin{array}{ll} & (p, w, X) \rightarrow_N (q, \epsilon, \epsilon) \\ \Rightarrow & (q, \epsilon) \in \delta(p, w, X) \qquad \text{(also } |w| \leq 1\text{)} \\ \Rightarrow & ([p, X, q] \rightarrow w) \in P\,. \end{array}$$

Beweis (Forts.):

Induktionsschritt $((l-1) \mapsto l)$:

Sei

$$
\begin{aligned}
(p, w, X) &\to_N (q_1, w', X_1 \cdots X_m)\\
&\to_N^* (q, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}
$$

eine Rechnung von N der Länge l, mit $w = ew'$ und $e \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$.

Nach Definition gibt es

$$([p, X, q] \to e[q_1 X_1 q_2] \cdots [q_m X_m q_{m+1}]) \in P \quad \text{mit } q_{m+1} = q$$

und eine Zerlegung $w' = w^{(1)} \cdots w^{(m)}$, so dass $w^{(1)} \cdots w^{(i)}$ der von N zu dem Zeitpunkt verarbeitete Teilstring von w' ist, wenn X_{i+1} zum ersten Mal oberstes Stacksymbol (bzw., für $i = m$, der Stack leer) wird.

Beweis (Forts.):

Gemäß Induktionsvoraussetzung gilt also

$$(q_i, w^{(i)}, X_i) \rightarrow_N^{l_i} (q_{i+1}, \epsilon, \epsilon) \qquad \text{mit } \sum l_i < l \text{ und}$$
$$[q_i, X_i, q_{i+1}] \rightarrow_G^* w^{(i)} \ .$$

Also folgt:

$$\begin{aligned}[p, X, q] &\rightarrow_G e[q_1, X_1, q_2] \cdots [q_m, X_m, q_{m+1}] \quad \text{mit } q_{m+1} = q \\ &\rightarrow_G^{<l} ew^{(1)} \cdots w^{(m)} = w\end{aligned}$$

Aus der Hilfsbehauptung folgt der Satz. □

Satz 92

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- *L wird von einer kontextfreien Grammatik erzeugt.*
- *L wird von einem NPDA akzeptiert.*

Beweis:

Folgt aus den vorhergehenden Sätzen. $\square$