4.9 Deterministische Kellerautomaten

Wir haben bereits definiert:
Ein PDA heißt deterministisch (DPDA), falls

$$|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \epsilon, Z)| \leq 1 \qquad \forall (q, a, Z) \in Q \times \Sigma \times \Delta\,.$$

Die von einem DPDA, der mit leerem Keller akzeptiert, erkannte Sprache genügt der Fano-Bedingung, d.h. kein Wort in der Sprache ist echtes Präfix eines anderen Wortes in der Sprache.

Festlegung:
Da wir an einem weniger eingeschränkten Maschinenmodell interessiert sind, legen wir fest, dass ein DPDA stets mit akzeptierenden Zuständen akzeptiert.

Definition 93

Ein DPDA ist in Normalform, falls gilt:

1. $(q', \alpha) = \delta(q, e, X)$ für $e \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $q, q' \in Q$, $X \in \Delta$

   $$\Rightarrow \alpha \in \{\epsilon, X, YX\} \text{ für } Y \in \Delta\,.$$

2. Der Automat liest jede Eingabe vollständig.

Satz 94

Zu jedem DPDA $A = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, \delta, F)$ kann ein äquivalenter DPDA in Normalform konstruiert werden.

Beweis:

Erste Schritte der Konstruktion:

1. Werden von A in einem Schritt mehr als zwei Symbole auf dem Stack abgelegt, wird dies von A' durch eine Folge von Schritten mit je 2 Stacksymbolen ersetzt.
2. Werden zwei oder ein Stacksymbol abgelegt und dabei das oberste Stacksymbol X geändert, entfernen wir zunächst in einem eigenen Schritt das oberste Stacksymbol und pushen dann die gewünschten Symbole. (Das „Merken“ erfolgt in der Zustandsmenge Q'.)
3. Wir vervollständigen δ' mittels eines (nicht akzeptierenden) Fangzustandes. Es könnte hier noch sein, dass der DPDA ab einem Zeitpunkt nur mehr und unbegrenzt viele ϵ-Übergänge ausführt.

Beweis (Forts.):

Hilfsbehauptung:
Der DPDA A führt ab einer bestimmten Konfiguration (q, ϵ, β) unendlich viele direkt aufeinander folgende ϵ-Übergänge genau dann aus, wenn

$$
\begin{array}{rcll}
(q, \epsilon, \beta) & \to^* & (q', \epsilon, X\beta') & \text{und} \\
(q', \epsilon, X) & \to^+ & (q', \epsilon, X\alpha) & \text{für } q, q' \in Q \\
 & & & X \in \Delta,\ \alpha, \beta, \beta' \in \Delta^*
\end{array}
$$

„$\Leftarrow$“: klar

Beweis (Forts.):

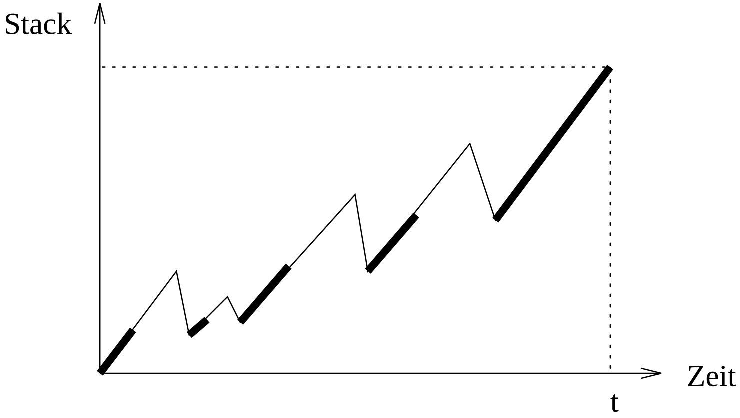
„⇒“: Betrachte eine unendlich lange Folge von ϵ-Übergängen.
Sei $n := |Q| \cdot |\Delta| + |\beta| + 1$.

Wird die Stackhöhe n nie erreicht, so muss sich sogar eine Konfiguration des DPDA's wiederholen. Daraus folgt die Behauptung.

Beweis (Forts.):

Ansonsten wird jede Stackhöhe $|\beta|, \ldots, n$ mindestens einmal erreicht (wegen der Normalform ist die Höhendifferenz pro Schritt $\in \{-1, 0, 1\}$).
Betrachte den Zeitpunkt t, in dem die Stackhöhe zum erstenmal n ist. Markiere für jedes $i \in \{|\beta|, \ldots, n\}$ den Zeitpunkt t_i, wo zum letzen Mal (vor Zeitpunkt t) die Stackhöhe $= i$ ist. Zu diesen Zeitpunkten t_i betrachte die Paare $(q, X) \in Q \times \Delta$, wobei q der Zustand des DPDA's und X das oberste Kellersymbol des DPDA's zu diesem Zeitpunkt ist.
Da es mehr als $|\Delta| \cdot |Q|$ markierte Paare gibt, taucht ein markiertes Paar (q', X) doppelt auf. Für dieses gilt dann $(q', \epsilon, X) \to^+ (q', \epsilon, X\alpha)$.

Beweis (Forts.):



Beweis (Forts.):

Das gleiche Argument gilt, falls sich die Stackhöhe um $> |Q| \cdot |\Delta|$ erhöht.

Damit lassen sich alle Paare (q', X) finden, für die gilt:

$$(q', \epsilon, X) \to^+ (q', \epsilon, X\alpha),\ \alpha \in \Delta^*.$$

Da der DPDA nicht endlos weiterlaufen soll, ersetzen wir $\delta(q', \epsilon, X)$ durch einen ϵ-Übergang in einen neuen Zustand q'' (der genau dann akzeptierend ist, wenn in der Schleife $(q', \epsilon, X) \to^+ (q', \epsilon, X\alpha)$ ein akzeptierender Zustand auftritt) und einen ϵ-Übergang von q'' in den nichtakzeptierenden Fangzustand. Die Details dieser Konstruktion werden nun beschrieben.

Beweis (Forts.):

Wir modifizieren den DPDA A in mehreren Schritten wie folgt:

1. A *merkt sich das oberste Kellersymbol im Zustand:*

$$Q' := \{q_{\text{pop}};\ q \in Q\} \cup \{qX;\ q \in Q, X \in \Delta\}$$

Für die Übergangsrelation δ' setzen wir (für $e \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$)

$$\delta'(qX, e, X) := \begin{cases} (pY, YX) \\ (pX, X) \\ (p_{\text{pop}}, \epsilon) \end{cases} \quad \text{falls } \delta(q, e, X) = \begin{cases} (p, YX) \\ (p, X) \\ (p, \epsilon) \end{cases}$$

Im dritten Fall kommt noch

$$\delta'(p_{\text{pop}}, \epsilon, X) := (pX, X)$$

für alle $X \in \Delta$ dazu.

Beweis (Forts.):

Weiter

$$q'_0 := q_0 Z_0$$
$$F' := \{qX;\; q \in F, X \in \Delta\}$$

Ein Zustand q' heißt spontan, falls q' von der Form p_{pop} (und damit $\delta'(q', \epsilon, X)$ für alle $X \in \Delta$ definiert) ist oder falls

$$q' = qX$$

und $\delta'(qX, \epsilon, X)$ definiert ist.

Beweis (Forts.):

Wir erweitern Q' um einen neuen Zustand f, $f \notin F'$, der als Fangzustand dient:

- für alle $q' = qX$, q' nicht spontan, $a \in \Sigma$, so dass $\delta'(qX, a, X)$ nicht definiert ist, setze
$$\delta'(qX, a, X) := (f, X)\,;$$
- setze
$$\delta'(f, a, X) := (f, X)$$
für alle $a \in \Sigma$, $X \in \Delta$.

Beweis (Forts.):

Bemerkungen:

1. f ist nicht spontan, f ist kein (akzeptierender) Endzustand.
2. Für alle nicht-spontanen $q' \in Q'$ von der Form $q' = qX$ ist $\delta'(q', a, X)$ für alle $a \in \Sigma$ definiert.
3. $\delta'(f, a, X)$ ist für alle $a \in \Sigma$ und $X \in \Delta$ definiert.

Falls sich der DPDA also in einem nicht-spontanen Zustand befindet und ein weiteres Eingabezeichen zur Verfügung steht, wird dieses gelesen!

2. *Endliche Gedächtniserweiterung:* Wir erweitern den DPDA so, dass er sich eine vorgegebene endliche Menge von Alternativen merken kann. Ersetzen wir z.B. Q' durch $Q' \times \{0,1\}^m$, so kann sich der Automat Information im Umfang von m Bits (also 2^m Alternativen) merken und diese bei Übergängen fortschreiben.

Der neue Anfangszustand, die Menge der (akzeptierenden) Endzustände und die neue Übergangsrelation werden entsprechend der intendierten Semantik des endlichen Speichers festgelegt.

Sei A' der DPDA vor der „Speichererweiterung". Wir erweitern A' zu A'', so dass A'' sich ein zusätzliches Bit im Zustand merken kann. Dieses Bit ist im Anfangszustand von A'' gleich 0. Bei einem Zustandsübergang von A'', der einem Zustandsübergang von A' aus einem spontanen Zustand q' entspricht, gilt: Ist $q' \in F'$, so wird das Bit im Zustand nach dem Übergang gesetzt, ansonsten kopiert. Entspricht der Zustandsübergang von A'' einem Zustandsübergang von A' aus einem nicht-spontanen Zustand, so wird das Bit gelöscht.

Beweis (Forts.):

Der Fangzustand f mit gesetztem Bit (i.Z. $f^{(1)}$) wird nun (akzeptierender) Endzustand, f mit nicht gesetztem Bit (i.Z. $f^{(0)}$) bleibt Nicht-Endzustand.

3. *Entfernung unendlicher Folgen von ϵ-Übergängen:* Für alle Zustände $q' = qX$ von A', für die gilt

$$(q', \epsilon, X) \to^{+} (q', \epsilon, X\alpha)\,,$$

setzen wir

$$\delta'(q', \epsilon, X) := (f, X)\,.$$

In A'' setzt dieser Übergang das Speicherbit, falls die obige Schleife einen Endzustand enthält (womit A'' in $f^{(1)}$ endet), ansonsten wird das Speicherbit kopiert.

Beweis (Forts.):

Bemerkung: Wenn wir weiter (und o.B.d.A.) voraussetzen, dass A (bzw. A', A'') seinen Keller nie leert, gilt: Der soeben konstruierte DPDA akzeptiert/erkennt ein Eingabewort w gdw er w in einem nicht-spontanen Zustand akzeptiert/erkennt. $\square$

Satz 95

Die Klasse der deterministischen kontextfreien Sprachen (also der von DPDA's erkannten Sprachen) [DCFL] ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis:

Sei A ein DPDA, A' ein daraus wie oben beschrieben konstruierter äquivalenter DPDA. O.B.d.A. sind in A' alle Endzustände $q \in F'$ nicht spontan.

Sei $N \subseteq Q'$ die Menge aller nicht-spontanen Zustände von A'. Konstruiere den DPDA $\bar{A}$, indem in A' F' durch $N \setminus F'$ ersetzt wird. Dann ergibt sich aus der vorangehenden Konstruktion direkt

$$L(\bar{A}) = \overline{L(A)}\,.$$

$\square$