Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2015
Übungsblatt 10
22. Juni 2015

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 29. Juni 2015, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Seien K_1 eine kontextfreie Sprache und K_2, K_3 deterministische kontextfreie Sprachen über Σ. Zeigen Sie:

1. Für $\overline{K_2 \cap K_3}$ ist das Leerheitsproblem entscheidbar.
2. Für $\overline{K_1 \cap K_2}$ ist das Wortproblem entscheidbar.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

1. Geben Sie eine deterministische Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ an, die für ein Eingabewort $w \in \{0,1\}^+$ eine Berechnung durchführt, so dass am Ende der Berechnung der Kopf am Anfang des Wortes w^R auf dem sonst leeren Band steht. (Erinnerung: w^R ist das gespiegelte Wort zu w.)

   Beschreiben Sie zunächst informell Ihre Lösungsidee!

2. Zeigen Sie durch Angabe einer geeigneten Konfigurationsfolge, dass Ihre Turingmaschine T die Eingabe 10 korrekt verarbeitet.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Eine deterministische Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ nennen wir eingeschränkt speicherfähig, wenn T bei der Abänderung einer Feldinschrift den Kopf nicht bewegt. Formal wird dies durch die folgende Eigenschaft E der Übergangsfunktion δ von T definiert, i.Z. $T \in E$:

(E) $\forall x, y \in \Gamma, p, q \in Q, d \in \{L, R, N\} F: \quad (\, x \neq y \;\wedge\; \delta(p, x) = (q, y, d)\,) \implies d = N\,.$

1. Definieren Sie eine eingeschränkt speicherfähige Turingmaschine $T \in E$, die für jede nichtleere Eingabe $w = x_1 x_2 \ldots x_n$ mit Dezimalziffern $x_i \in \Sigma = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ eine Berechnung durchführt, so dass bei Terminierung das Wort $w' = x_1 x_1 \ldots x_1$ der Länge n auf dem sonst leeren Band steht mit Kopf von T auf der letzten Ziffer von w'. Begründen Sie knapp Ihre Konstruktionsidee.

2. Geben Sie ein Verfahren an, das zu jeder deterministischen Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ eine eingeschränkt speicherfähige Turingmaschine $T' = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, \Box, F) \in E$ liefert, so dass für die akzeptierten Sprachen $L(T) = L(T')$ gilt.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{*, \#\}$. Wir kodieren natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ als Folge $** \ldots *$ der Länge n, d. h. $| ** \ldots * | = n$, und stellen Paare $x, y \in \{*\}^*$ als Wort $x\#y \in \Sigma^*$ dar.
Wir betrachten für $x, y, z \in \{*\}^*$ die modifizierte Subtraktion $|z| = |x| \dot{-} |y|$.
(Man beachte $1 \dot{-} 2 = 0$.)

1. Definieren Sie durch Angabe der Übergangsfunktion δ eine deterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$, die für $x, y, z \in \{*\}^*$ die modifizierte Subtraktion $|z| = |x| \dot{-} |y|$ wie folgt durchführt:

   Startkonfiguration: $(\epsilon, q_0, x\#y)$.
   Endkonfiguration: $(\Box^k z, q_e, \#r\Box^l)$, mit $q_e \in F$, $r \in \{*\}^*$ und $k, l \in \mathbb{N}$.
   Es gilt: $(\epsilon, q_0, x\#y) \rightarrow_M^* (\Box^k z, q_e, \#r\Box^l)$.

   Beschreiben Sie kurz die Konstruktionsidee für Ihre Maschine.

2. Gilt für Ihre Maschine M bei beliebiger Eingabe $w \in \Sigma^*$ die Gleichung $L(M) = \{x\#y\,;\, x, y \in \{*\}^*\}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Konstruktion geeigneter linear beschränkter Automaten, dass die Klasse der kontextsensitiven Sprachen abgeschlossen ist gegenüber Durchschnittsbildung.

Zusatzaufgabe 8 (Für Interessierte)

Es wird erzählt, dass in einem kleinen Dorf in Bayern ein alter Barbier lebt, der alle diejenigen Männer im Dorf rasiert, die sich nicht selbst rasieren.
Warum ist die Frage nach dem Alter des Barbiers sinnlos?
Formalisieren Sie den Sachverhalt und weisen Sie nach, dass die Erzählung eine Lüge enthält!

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

1. Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn A semi-entscheidbar und B entscheidbar ist, dann ist $A \setminus B$ semi-entscheidbar.

2. Gegeben seien zwei entscheidbare Prädikate $P(x, y)$ und $Q(x, y)$. Zeigen Sie, dass $R(x, y) = P(x, y) \wedge Q(x, y)$ entscheidbar ist.

3. Ist jede Teilmenge einer rekursiven Sprache rekursiv aufzählbar? Beweis!

Vorbereitung 2

Zeigen Sie, dass man die folgende Anweisung durch ein LOOP-Programm simulieren kann, das kein IF-Konstrukt enthält: **IF** $x_i \leq x_j$ **THEN** P_1 **ELSE** P_2 **END**.

Vorbereitung 3

Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind:

$$iszero(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \qquad eq(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Vorbereitung 4

Sei $f(x, y)$ primitiv rekursiv. Zeigen Sie mit Hilfe der Projektionsfunktionen $\pi_i^k := proj_{k,i}$ zusammen mit der (nicht erweiterten) Komposition, dass die Funktion g mit $g(x, y) = f(y, x)$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ ebenfalls primitiv-rekursiv ist.

Vorbereitung 5

Wir bezeichnen f als eine <u>erweiterte Komposition</u> der Funktionen $g_1, \ldots, g_k$, falls $f(x_1, \ldots, x_n) = t$, so dass t ein Ausdruck ist, der nur aus den Funktionen $g_1, \ldots, g_k$ und den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ besteht.

Sei t_0 ein funktionaler Ausdruck, der nur primitiv-rekursive Funktionen und Variable x_i enthält. t enthalte nur $f(m, \overline{x})$ mit einem Variablenvektor $\overline{x}$, primitiv-rekursive Funktionen, m und Variable x_i. Dann heißen die Gleichungen

$$f(0, \overline{x}) = t_0,\ f(m + 1, \overline{x}) = t$$

das <u>erweiterte Schema</u> der primitiven Rekursion.

Man zeige:

1. Eine erweiterte Komposition von primitiv-rekursiven Funktionen ist wieder primitiv-rekursiv.

2. Das erweiterte Schema der primitiven Rekursion führt nicht aus der Menge der primitiv-rekursiven Rekursionen heraus.

Tutoraufgabe 1

Zeigen Sie, dass man die folgenden Anweisungen durch WHILE-Programme, wie sie in der Vorlesung definiert wurden, simulieren kann:

1. $x_i := x_j + x_k$ (Addition zweier Variablen),
2. $x_i := x_j \dot{-} x_k$ (Bedingte Subtraktion, d. h. $x_j \dot{-} x_k = 0$ für $x_j \leq x_k$).

Tutoraufgabe 2

Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind.

1. $\mathit{tower}(n) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$ (d.h. $2^{(2^{(2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}})})}$, Turm der Höhe n),
2. $\mathit{ifthen}(n, a, b)$ mit

$$\mathit{ifthen}(n, a, b) = \begin{cases} a & n \neq 0\,, \\ b & n = 0\,. \end{cases}$$

Tutoraufgabe 3

Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ diejenige Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}_0, n \neq 0$ durch die Rekursion

$$f(n+1) = f(n) \cdot f(n-1)$$

mit den Startwerten $f(0) = 1$ und $f(1) = 2$ definiert ist.

1. Zeigen Sie, dass f primitiv-rekursiv ist, indem Sie ein LOOP-Programm angeben.
2. Zeigen Sie durch Rückführung auf die Definition, dass f primitiv-rekursiv ist.

Tutoraufgabe 4

Wir wollen untersuchen, ob sich (ähnlich wie bei den WHILE-Programmen) jedes LOOP-Programm in eine „Normalform“

$$\texttt{LOOP}\ X\ \texttt{DO}\ P\ \texttt{END}$$

bringen lässt, so dass P keine Schleifen mehr enthält.
Wir bezeichnen mit $V(P)$ die Menge der Variablen, die in P vorkommen (diese Menge ist stets endlich). Für einen gegebenen Programmlauf bezeichnen wir mit $[x]$ den Wert der Variablen x beim Start des Programms, und mit $[x]'$ den Wert der Variablen nach Programmende.

1. Zeigen Sie: Für jedes LOOP-Programm P <u>ohne Schleifen</u> gibt es eine Konstante k, so dass gilt:
$$\max_{x \in V(P)} [x]' \leq \max_{x \in V(P)} [x] + k\,.$$
2. Zeigen Sie, dass es kein LOOP-Programm in Normalform geben kann, welches die Quadratfunktion $n \mapsto n^2$ berechnet.